Coloration de graphe

Samy Jaziri

Sujet de khôlle inspiré par les « Graph Problems » du livre The Algorithm Design Manual *de Steven S. Skiena*

Préambule

*Les candidats sont libres d'utiliser le **C** ou le **OCaml** pour coder les algorithmes de ce sujet.*

Pour vous mettre dans les conditions du concours, vous n'avez pas le droit d'accéder aux ressources en ligne.

En ce qui concerne les questions orales de la khôlle, lorsque la description d'un algorithme est demandée, vous devez présenter son fonctionnement de fa'c'on schématique, courte et précise. Vous ne devez pas expliquer votre code ligne par ligne! Quand la complexité d'un algorithme est demandée en temps ou en mémoire en fonction d'un paramètre n, on demande l'ordre de grandeur en fonction du paramètre, donné en notation de Landau ($\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(\log(n)), \ldots$). Prenez des notes lorsque vous préparez une question orale pour retrouver plus rapidement les grandes lignes de votre explication lorsque l'examinateur passe vous voir.
Il vous est **demandé** de **tester vos programmes sur des petits exemples** que vous aurez résolus préalablement à la main.
Vous devrez tester votre programme sur des exemples bien choisis permettant de vérifier rapidement que votre code est fonctionnel.
Il vous est demandé d'aborder les questions dans l'ordre et de noter vos difficultés à répondre à une question avant de passer à la suivante. Vous pourrez alors les aborder avec l'examinateur.

1 Mise en jambe

On considère un graphe non-orienté $G = (V, E)$ où $V = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des sommets et E est un ensemble d'arêtes qui sont des paires de sommets de V. Une *coloration à k couleurs* de G est une fonction Γ de V dans $\{1 \dots k\}$ telle que pour tout sommet $i \neq j \in V$ voisins, $\Gamma(i) \neq \Gamma(j)$. Si il existe un coloration à k couleurs de G, on dira que G est k-coloriable. Le nombre k minimal tel que G est k-coloriable est appelé *nombre chromatique de G*.
Dans ce sujet les graphes seront représentés sous forme de *listes d'adjacences*.

Préparer une réponse à donner à l'oral

Trouver une borne du nombre chromatique de G en fonction du degré maximal de ses sommets. Justifiez que le nombre proposé est une borne. La preuve formelle n'est pas demandée. La borne peut-elle être atteinte ? Dans quel cas ?

Préparer une réponse à donner à l'oral

Donner un exemple de graphe qui ne possède pas de coloration à k couleurs, pour k fixé.

Question 1

Implémenter un algorithme qui prend en argument un graphe et qui vérifie si le graphe est 2-coloriable.

Préparer une réponse à donner à l'oral

Montrer qu'un graphe est bipartie si et seulement si il est 2-coloriable.

2 Approximation du nombre chromatique

Préparer une réponse à donner à l'oral

Proposer un algorithme glouton qui renvoie une coloration d'un graphe en $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. Donner un exemple de graphe 3-coloriable sur lequel votre algorithme ne renvoie pas le nombre chromatique.

Question 2

Implémenter votre algorithme.

L'algorithme de Welsh et Powell consiste à colorer séquentiellement le graphe en visitant les sommets par ordre de degré croissant. Il reprend l'approche gloutonne mais essaye d'exploiter l'idée que les sommets les plus difficiles à colorier seront les sommets ayant le plus grand degré et seront donc coloriés en premier.

Question 3

Implémenter l'algorithme de Welsh et Powell.

Préparer une réponse à donner à l'oral

Quelle est la complexité de l'algorithme ?

Préparer une réponse à donner à l'oral

Donner un exemple de graphe G à $2\,n$ sommets, 2-coloriable, dont l'algorithme de Welsh et Powell renvoie une coloration à n couleurs de G.

3 Calcul exact du nombre chromatique

Le calcul du nombre chromatique d'un graphe est un problème NP-Complet. Il sera donc toléré que la complexité des algorithmes demandés ci-dessous soit exponentielle.

Question 4

Implémenter un algorithme qui vérifie si un graphe est 3-coloriable.

Question 5

Implémenter un algorithme qui calcul le nombre chromatique d'un graphe.